МОДИФИКАЦИИ ИГРОВЫХ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ Л-КРИТЕРИЯ УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНОСТИ

Лега Ю.Г., Златкин Артур А., Златкин Александр А.
Черкасский государственный технологический университет, chemistry2007@mail.ru

Целью данной работы является расширение функциональных возможностей игровых критериев оптимальности для применения при принятии удовлетворительных решений в сложных процессах дискретного управления, возмущенных неопределенным параметром.

Анализируются крайне пессимистические минимаксные и максиминные игровые критерии оптимальности Вальда и Сэвиджа в терминах выигрышей и рисков соответственно, критерии оптимальности крайнего оптимизма в тех же терминах и критерий оптимальности пессимизма-оптимизма Гурвица, объединяющий крайне пессимистические и крайне оптимистические критерии путем введения коэфициетна $\chi, 0 \le \chi \le 1$, так, что при $\chi = 1$ критерий Гурвица вырождается в критерий Вальда или Сэвиджа, а при $\chi = 0$ − в критерий крайнего оптимизма.

Все перечисленные критерии анализируются применительно к решению класса задач игры с природой т.е. неантагонистической игры с учетом неопределенного возмущающего фактора при принятии решений в процессах дискретного управления. При этом предполагается, что неопределенный возмущающий параметр $w \in W$, где W - множество неопределенностей, изменяется в предполагаемом диапазоне и принимает в нем ряд предполагаемых значений x_0^j, $j = 1,2,...,n$, где $w_j = x_0^j$ может быть, например, начальным состоянием дискретного процесса, изменяющегося по закону.

$$x_{k+1} = f\left(x_k, y_k\right),\ k = 0,1,...,N-1;\ \text{í .ñ.} = x_0^j,\ j = 1,2,...,n\,.$$

Для входного сигнала y_k задается допустимая область Y_k, $y_k \in Y_k, k = 0,1,...,N-1$, и разыскивается не максимум I^* критериальной функции выигрыша I, а потеря выигрыша, т.е. риск $r = I^* - \overline{I}$, определяемый Л-критерием удовлетворительности, предложенным проф. Легой Ю.Г. [2].

$$\text{Ë} = I^* - \overline{I} \le \varepsilon\left(\overline{y}_j, x_0^j\right),\ j = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n\,,$$

где вектор $\overline{y}_i$ − принятое решение, обусловливающее в силу его неоптимальности потерю выигрыша и $\overline{y} \ne y^*$.

Величина ε-окрестности вычисляется на основе дискретного принципа максимума Понтрягина [3] по формуле для соответствующих векторов управляющей переменной $\overline{y}_i = \left(\overline{y}_{i0},...,\overline{y}_{i,N-1}\right)$, переменной состояния $\overline{x}$ и двойственной (сопряженной) переменной $\overline{p}$, входящих в функцию Гамильтона H, т.е.

$$\varepsilon\left(\overline{y}_i, x_0^j\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \max_{y_k \in Y_k}\left[H\left(\overline{p}_{k+1}, \overline{x}_k, y_k\right) - H\left(\overline{p}_{k+1}, \overline{x}_k, \overline{y}_k\right)\right].$$

Здесь $H\left(\overline{p}_{k+1}, \overline{x}_k, \overline{y}_k\right) = \left\langle \overline{p}_{k+1}, f\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right)\right\rangle$, $k = 0,1,...,N-1$, $\overline{p}_k \left[\dfrac{\partial f\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right)}{\partial x_k}\right]^{\grave{\text{Ò}}} \overline{p}_{k+1}, k = N-1,...,1$, при известном конечном граничном значении $\overline{p}_N$ двойственной переменной $\overline{p}_{k+1}$, входящей в скалярное произведение, обозначенное скобками $\langle \square \rangle$ и индекс «Ò» указывает на транспонирование матрицы в квадратных скобках.

Если игровая матрица выигрышей с элементами I_i^j, $i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$, содержит седловую точку и в ней выполняется условие

$$\min_j \max_i I_i^j = \max_i \min_j I_i^j = I^*,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$$

то точка оптимума I^* будет соответствовать наименьшему при изменении j значению среди максимумов по i столбцов матрицы. [1] В этом случае $\ddot{E}$ -критерий удовлетворительности модифицируется в виде критерия $\ddot{E}_1$, равного выражению

$$\ddot{E}_1 = I^* - \overline{I} = \min_j \max_i I_i^j - \overline{I}_i^{j*} = I_{i\max}^{j\min} - \overline{I}_i^{j\min} =$$
$$= I_{j\min,i\max} - \overline{I}_i^{j\min} \le \varepsilon^1\left(\overline{y}_i, x_0^{j*}\right) = \varepsilon^1\left(\overline{y}_i, x_0^{j\min}\right),\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$$

где $I^* = \min_j \max_i I_i^j = I_{i\max}^{j\min} = I_{j\min,i\max}$; $\overline{I}_i^{j*} = \overline{I}_i^{j\min}$; $x_0^{j*} = x_0^{j\min}$.

Следовательно, здесь индекс $j*$ определяет предполагаемое начальное состояние x_0^{j*}, при котором достигается минимаксная точка оптимума I^*, т.е. наименьшее по j значение выигрыша среди максимумов выигрышей по i (среди максимумов столбцов матрицы), а индекс i характеризует величину отклоненного от точки оптимума выигрыша $\overline{I}_i^{j*}$ в силу принятого неоптимального решения $\overline{y}_i \ne y_i^*$ в столбце $x_0^j = x_0^{j*} = x_0^{j\min}$.

Эта модификация Л-критерия удовлетворительности является крайне пессимистической, т.к. опирается на крайне пессимистический минимаксный критерий Вальда [1]

$$W = \min_j \max_i I_i^j,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n.$$

Противоположным является крайне оптимистический Л-критерий удовлетворительности $\ddot{E}_2$ вида [2]

$$\ddot{E}_2 = I^* - \overline{I} = \max_j \max_i I_i^j - \overline{I}_i^{j*} = I_{i\max}^{j\max} - \overline{I}_i^{j\max} =$$
$$= I_{j\max,i\max} - \overline{I}_i^{j\max} \le \varepsilon^0\left(\overline{y}_i, x_0^{j*}\right) = \varepsilon^0\left(\overline{y}_i, x_0^{j\max}\right),\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$$

где $I^* = \max_j \max_i I_i^j = I_{i\max}^{j\max} = I_{j\max,i\max}$; $\overline{I}_i^{j*} = \overline{I}_i^{j\max}$; $x_0^{j*} = x_0^{j\max}$.

Очевидно, здесь индекс $j*$ определяет то начальное состояние x_0^{j*}, при котором достигается уже не минимаксная, а максимаксная точка оптимума I^*, т.е. наибольшее по j значение выигрыша среди максимумов выигрышей по i (среди максимумов столбцов матрицы). При этом индекс i характеризует отклоненное от точки максимаксного выигрыша I^* значение выигрыша $\overline{I}_i^{j*} = \overline{I}_i^{j\max}$ в силу принятого неоптимального решения $\overline{y} \ne y_i^*$ в столбце $x_0^{j*} = x_0^{j\max}$

Крайне оптимистическая модификация Л-критерия удовлетворительности опирается соответственно на крайне оптимистический максимаксный критерий оптимальности вида

$$V_{j\max,i\max} = \max_j \max_i I_i^j,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n.$$

Промежуточной между модификациями $\ddot{E}_1$ и $\ddot{E}_2$ является модификация $\ddot{E}$ -критерия удовлетворительности $\ddot{E}_3$ вида

$$\ddot{E}_3 = \chi \ddot{E}_1 + (1-\chi)\ddot{E}_2 = \chi\left(\min_j \max_i I_i^j - \overline{I}_i^{j\min}\right) + (1-\chi)\left(\max_j \max_i I_i^j - \overline{I}_i^{j\max}\right) \le$$
$$\le \varepsilon^{\chi}\left(\overline{y}_i, x_0^j\right),\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n;\ 0 \le \chi \le 1.$$

Очевидно: при $\chi = 1$ получим $\ddot{E}_3 = \ddot{E}_1$ и $\varepsilon^{\chi}\left(\overline{y}_i, x_0^j\right) = \varepsilon^1\left(\overline{y}_i, x_0^{j\min}\right)$,

при $\chi = 0$ будет $\ddot{E}_3 = \ddot{E}_2$ и $\varepsilon^{\chi}\left(\overline{y}_i, x_0^j\right) = \varepsilon^0\left(\overline{y}_i, x_0^{j\max}\right)$.

Следовательно, промежуточная модификация Л-критерия удовлетворительности $\ddot{E}_3$ является критерием пессимизма-оптимизма и опирается соответственно на критерий оптимальности пессимизма-оптимизма Гурвица ($\tilde{A}$ − критерий) вида [1]

$$\tilde{A} = \chi \min_j \max_i I_i^j + (1-\chi)\max_j \max_i I_i^j$$

Последний при $\chi = 1$ преобразуется в минимаксный критерий Вальда, а при $\chi = 0$ − в максимаксный критерий оптимальности.

Рассмотренные модификации Л-критериев удовлетворительности и соответствующих им критериев оптимальности получены на основе игровой матрицы выигрышей, но могут быть составлены в терминах матрицы рисков.

Выводы

Сравнивая полученные модификации Л-критерия удовлетворительности с соответствующими критериями оптимальности легко видеть их отличия, обусловленные расширением области принятия оптимальных решений до границ принятия удовлетворительных решений в пределах ε-окрестности точки оптимума.

Этот основной результат на практике часто оказывается целесообразнее поиска оптимального решения в условиях неопределенности по возмущающему параметру, т.к. при принятии удовлетворительных решений нет необходимости в обеспечении минимального риска, когда достаточно, чтобы он был ограничен менее жестко в пределах здравого смысла (в удовлетворительных пределах). «Погоня» за оптимумом (максимумом или минимумом критериальной функции) не всегда оправдана, если имеется возможность «не тратить много сил» и средств и удовлетвориться достигнутым результатом в пределах ε-окрестности точки оптимума.

На примере конструирования Л-критерия удовлетворительности и его модификаций показано, как можно расширить функциональные возможности классических критериев оптимальности Вальда, Сэвиджа, Гурвица и распространить модификации этих критериев в виде соответствующих модификаций Л-критерия удовлетворительности на класс задач принятия решений в условиях неопределенности по возмущающему параметру (класс задач игры с природой).

1) *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. – К.: Издательский дом «Слово», 2003. – 685 с.
2) *Лега Ю.Г., Златкин А.А.* Построение Л-критериев и их применение в задачах принятия удовлетворительных решений в неопределенных условиях // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2007. – №1. – С.81-86.
3) *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384с.